Demuestre que $\det(A)=1$ si $A=A^2$ siendo A una matriz no singular.

Dan:

- $A=A^2$.

Piden:

- $\det(A)=1$.

Plan: Encontrar un modo mediante el cual la ecuación dada más otras ya conocidas y correspondientes al tema, puedan realcionarse para generar una fracción de la forma $\frac{a}{a}$ o una expresión en la que se involucre $\det(I)$ pues con cualquiera de éstas se puede obtener un 1.

Ejecución: $A=A^2$ implica:

$$\begin{aligned} A\,A^{-1}=I &= A^2\,A^{-1} \\ &= (A\,A)\,A^{-1} \\ &= A\,(A\,A^{-1}) \\ &= A\,(I) \\ I &= A \end{aligned}$$

Observación: Se obtuvo que si $A=A^2$ entonces $A=I$ aplicando la definición de la potencia cuadrada, la ley asociativa y la definición de la matriz identidad.

Ahora, se aplica la propiedad del producto de determinantes: $\det(A\,B)=\det(A)\det(B)$

$$\begin{aligned} \det(A)=\det(A^2)=\det(A\,A) &= \det(A)\det(A) \\ &= \det(I)\det(I) \\ &= 1\cdot 1 \\ \det(A) &= 1 \end{aligned}$$

Revisión: Se optó por hallar un medio para obtener la expresión $\det(I)$ porque es más sencillo relacionar una matriz con su inversa en lugar de intentar encontrar directamente con determinantes una fracción del tipo $\frac{a}{a}$. Igualmente, se hubiera podido utilizar la expresión $\det(A^{-1})=\frac{1}{\det(A)}$ para dar con el mismo resultado:

$$\det(A)=\det(I)=1.$$

Autor: Nicolás Salazar B.

Fuente: Kolman, B. & Hill, D.R. *Álgebra Lineal*. Octava Edición. Pearson, Prentice-Hall. México, 2006. Pg.194: T.10.